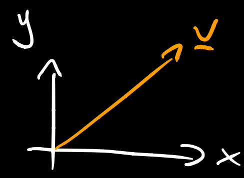
Übungsstunde 8:

Themen heute:

- Normierte Vektorräume
- Skalarprodukte in lin. Räumen
- Orthogonalprojektion
- Orthonormalbasis
- Gram-Schmidt



Normierte Vektorräume:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

(i) $\forall v \in V: \|v\| \geq 0$

und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ii) $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

(iii) $\forall v, w \in V: \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Bsp.: Maximumsnorm oder $\|\cdot\|_\infty$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \|\underline{v}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|v_i|\}$$

Die p-Norm:

$$\|\underline{v}\|_p = \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p + |v_3|^p + \ldots + |v_n|^p}$$

$$\lim_{p \to \infty} \|\underline{v}\|_p = \lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p + \ldots |v_n|^p} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|v_i|\}$$

Alle Normen sind äquivalent!

$$\Rightarrow \quad c \cdot \|\cdot\|_a \leq \|\cdot\|_b \leq C \cdot \|\cdot\|_a$$

Skalarprodukt in linearen Räumen:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto \langle a,b\rangle$$

(i) $\forall x,y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle x, \lambda\cdot(y+z)\rangle = \langle x, \lambda y + \lambda z\rangle = \langle x, \lambda y\rangle + \langle x, \lambda z\rangle$$
$$= \lambda\langle x,y\rangle + \lambda\langle x,z\rangle$$

oder

$$\langle x+\lambda y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \lambda\langle y,z\rangle$$

(ii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ (symmetry)

(iii) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$

Induzierte Normen: $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $a \in V$

$$\|a\| = \sqrt{\langle a,a\rangle}$$

Bsp.: $\mathbb{R}^n$

eukl.: $\langle \underline{x},\underline{y}\rangle_2 = \underline{x}^T\cdot\underline{y} = \|x\|\,\|y\|\cos\phi$

obel. Skalarpr.: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\langle x,y\rangle_A = x^T A y = [x_1 \;\; x_2]\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 = (*)$$

(i) $\langle x_1 + \lambda x_2, y\rangle_A = (x_1+\lambda x_2)^T A y = (x_1^T + \lambda x_2^T) A y$

$\cancel{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}$ $= x_1^T A y + \lambda x_2^T A y = \langle x_1, y\rangle_A + \lambda\langle x_2, y\rangle_A$

(ii) $\langle y,x\rangle_A = [y_1 \;\; y_2]\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \dots = (*)$

$$\langle y,x\rangle_A = y^T A x = (x^T A^T y)^T = (x^T A y)^T = (\langle x,y\rangle_A)^T = \langle x,y\rangle_A$$

(iii)

$$\langle x,x\rangle_A = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 \geq 0 \quad \forall x \leftarrow$$

$$\iff EW_{\underline{A}} \geq 0$$

$$1x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 \geq 0$$

$$(x_1 - 2x_2)^2 \geq 0$$

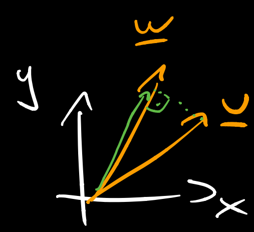
∘ Skalarprodukt in $C[a,b]$

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt$$

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(t)\,dt \geq 0$$

Die Orthogonalprojektion: $x \in V$ auf $y \in V$, $y \neq 0$

$$z = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\cdot y$$



gewichtete Projektion von x auf y

$$z = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\cdot y$$

$\langle y,y\rangle = \|y\|^2$

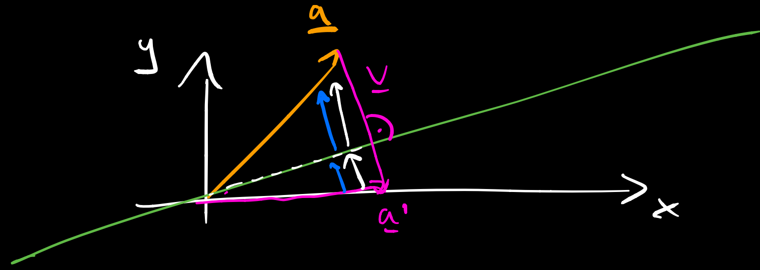
$$= \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|}\cdot\frac{y}{\|y\|}$$

$\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|}$: Projektion von x auf y

$\frac{y}{\|y\|}$: Einheitsvektor in Richtung y

$$\underline{H} = \underline{\underline{I}} - 2\cdot\frac{vv^T}{v^Tv} = \underline{\underline{I}} - 2\cdot\frac{vv^T}{\langle v,v\rangle}$$

$$\underline{H}\,\underline{a} = \underline{\underline{I}}\cdot\underline{a} - 2\,\frac{vv^T a}{\langle v,v\rangle} = \underline{\underline{I}}\cdot\underline{a} - 2\,\frac{v\,\langle v,a\rangle}{\langle v,v\rangle}$$



Orthonormalbasis: (ONB)

Bsp. $\mathbb{R}^3: e_1, e_2, e_3$ aka x, y, z

Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren: $B = \{b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(n)}\}$

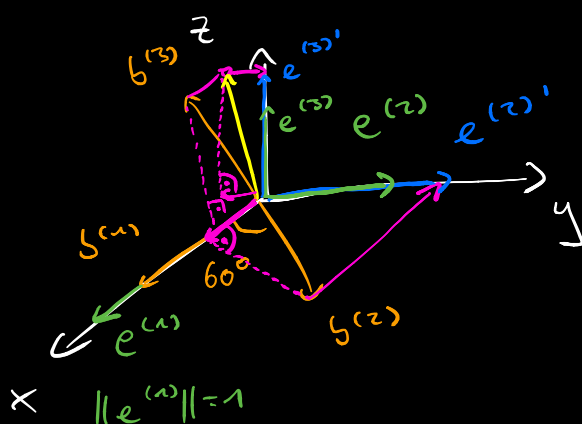
(i) $e^{(1)} = \dfrac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)} \Rightarrow e^{(2)} = \dfrac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)} \Rightarrow e^{(3)} = \dfrac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

(iv) Und so weiter ...

$\Rightarrow \{e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}\}$



$G_3 = \quad \underline{v} = a \cdot (1) + b \cdot (t^2) + c \cdot (t^4)$ $\quad [\underline{v}]_{G_3} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$= d \cdot (1+t^2) + e \cdot (1-t^2) + f \cdot (1+t^2+t^4)$ $\quad [\underline{v}]_P = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$

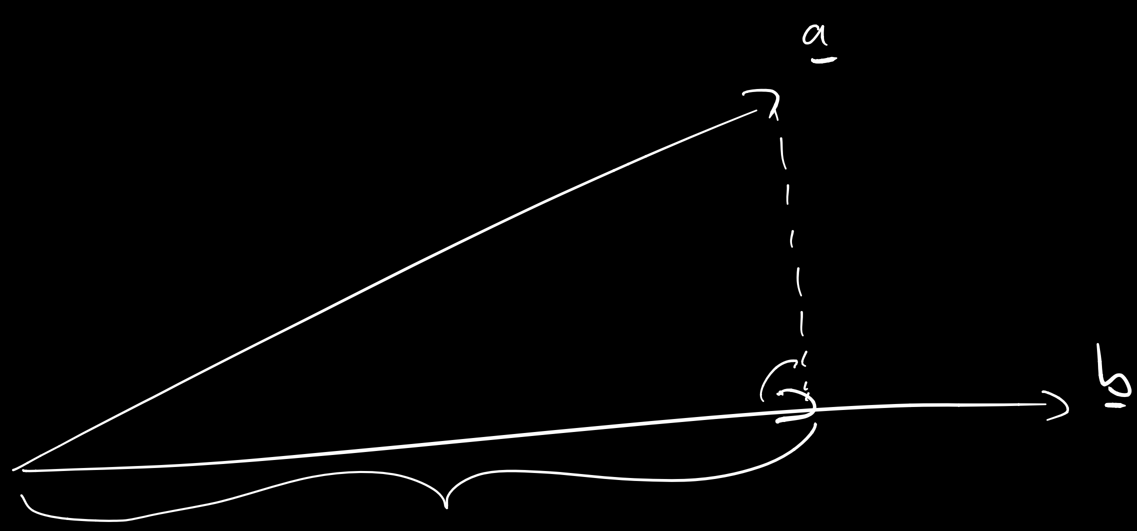
$$= a\cdot(1) + b\cdot(t^2) + c\cdot(t^4)$$

$$= a\cdot\left(d'\cdot(1+t^2) + e'\cdot(1-t^2) + f'\cdot(1+t^2+t^4)\right)$$
$$b\cdot\left(d''(1+t^2) \quad e''(1-t^2) \quad f''(1+t^2+t^4)\right)$$
$$c\cdot\left(d'''(1+t^2) \quad e'''(1-t^2) \quad f'''(1+t^2+t^4)\right)$$

$$\underbrace{(ad' + bd'' + cd''')}_{d}(1+t^2) +$$

$$\begin{bmatrix} d' & d'' & d''' \\ e' & e'' & e''' \\ f' & f'' & f''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

$$T \quad [\underline{v}]_{G_3} = [\underline{v}]_P$$



$$\frac{\langle a, b\rangle}{b} = \underline{\underline{\langle a, e_b\rangle}}$$

$$\langle a, b\rangle$$

Sommer 2019: Aufgabe

$AB = AC \quad | A^H \cdot \quad \Rightarrow \quad A^H AB = A^H AC$

$A^H AB = A^H AC \quad | B^H \quad \Rightarrow \quad AB - AC = 0$

$B^H A^H AB = B^H A^H AC \quad \Leftarrow$

$A^H AB = A^H AC$

$A^H (AB - AC) = 0$

$C^H A^H AB = C^H A^H AC \quad \Leftarrow$

$B^H A^H AB - C^H A^H AB = B^H A^H AC - C^H A^H AC$

$B^H A^H (AB - AC) = C^H A^H (AB - AC)$

$(AB)^H (AB - AC) = (AC)^H (AB - AC)$

$(AB - AC)^H (AB - AC) = 0$

Übungsstunde 8:

Themen heute:

- Normierte Vektorräume
- Skalarprodukte in lin. Räumen
- Orthogonalprojektion
- Orthonormalbasis (ONB)
- Gram-Schmidt

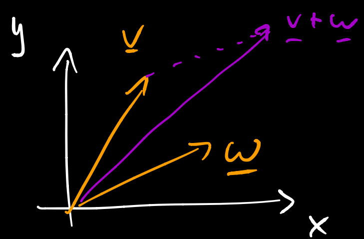
Normierte Vektorräume:

$V = \{V, \|\cdot\|\} \qquad \|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

(i) $\forall v \in V : \|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ii) $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

(iii) $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)



Bsp: $\|\cdot\|_2 : V \to \mathbb{R}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \mapsto \|\underline{v}\|_2 = \sqrt[2]{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$

$\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}, \quad \underline{v} \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} \{|v_i|\}$

$\|\cdot\|_p : V \to \mathbb{R}, \quad \underline{v} \mapsto \|\underline{v}\|_p = \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p + \dots + |v_n|^p}$

$\|\cdot\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|\cdot\|_p = \lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p + \dots + |v_n|^p} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|v_i|\}$

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a^n} = a$

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$

Alle Normen sind äquivalent!:

$$c\cdot\|\cdot\|_a \le \|\cdot\|_b \le C\cdot\|\cdot\|_a$$

<u>Skalarprodukten in linearen Räumen:</u> $x, y, z \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto \langle a,b\rangle$$

(i)
$$\langle x, \lambda(y+z)\rangle = \langle x, \lambda y + \lambda z\rangle = \langle x, \lambda y\rangle + \langle x, \lambda z\rangle$$
$$= \lambda\langle x,y\rangle + \lambda\langle x,z\rangle$$

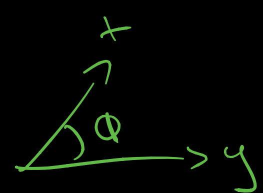
$$\langle x+\lambda y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \lambda\langle y,z\rangle$$

(ii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ $\quad\left(\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}\right)$

(iii) $\langle x,x\rangle \geq 0$ und $\boxed{\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0}$

<u>Induzierte Norm:</u>

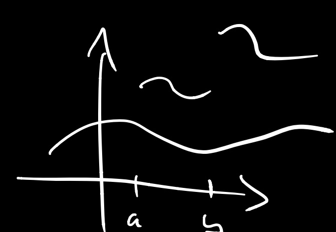
$$\|a\| = \sqrt{\langle a,a\rangle}$$



Bsp: $\langle x,y\rangle_2 = x^T y = \|x\|\,\|y\|\cos(\phi)$

Im $\mathcal{C}[a,b]$:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt$$



Orthogonalität: x orth. auf y, falls:

$$\langle x, y\rangle = 0$$

Bsp: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} \geq 0 \quad \forall x$

$$\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle_A = \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, y = [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_2x_2 = (*)$$

(i) $\langle \underline{x}, y + \lambda \underline{z}\rangle_A = \underline{x}^T \underline{\underline{A}} (y + \lambda \underline{z})$

$$= \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, y + \underline{x}^T \underline{\underline{A}} \lambda \underline{z}$$

$$= \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, y + \lambda \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{z} = \langle \underline{x}, y\rangle_A + \lambda \langle \underline{x}, \underline{z}\rangle_A$$

(ii) $\langle \underline{x}, y\rangle_A = \langle y, \underline{x}\rangle_A$!

1. Mögl.: $[y_1 \; y_2] \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (*)$

2. Mögl.: $y^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = (\underline{x}^T \underline{\underline{A}}^T y)^T = (\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, y)^T = (\langle \underline{x}, y\rangle)^T$

$$= \langle \underline{x}, y\rangle$$

(iii) $\langle \underline{x}, \underline{x}\rangle_A \geq 0$:

1. Mögl. $(*) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 \geq 0 \quad \forall \underline{x}$

2. Mögl. $\underline{\underline{A}}$ s.p.d $\Leftrightarrow$ EW von $A \geq 0$

1. Mögl. $\quad 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 \geq x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$

$$= (x_1 - 2x_2)^2 \geq 0$$

<u>Orthogonalprojektion:</u> von $\underline{x}$ auf y

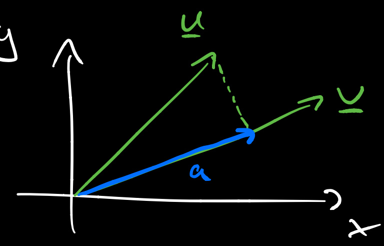
$$\underline{z} = \frac{\langle \underline{x}, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y$$

Länge von orth. Proj. von $\underline{x}$ auf y, gestreckt um Faktor $\|y\|$

$$\underline{z} = \frac{\langle \underline{x}, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y$$

$\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$

$= \|\cdot\|^2 = \|y\| \cdot \|y\|$



$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$

$\langle \underline{u}, \underline{e}_v \rangle = a$

$$= \underbrace{\frac{\langle \underline{x}, y \rangle}{\|y\|}}_{\text{Länge von } x \text{ orth. } y} \cdot \underbrace{\frac{y}{\|y\|}}_{\underline{e}_y}$$

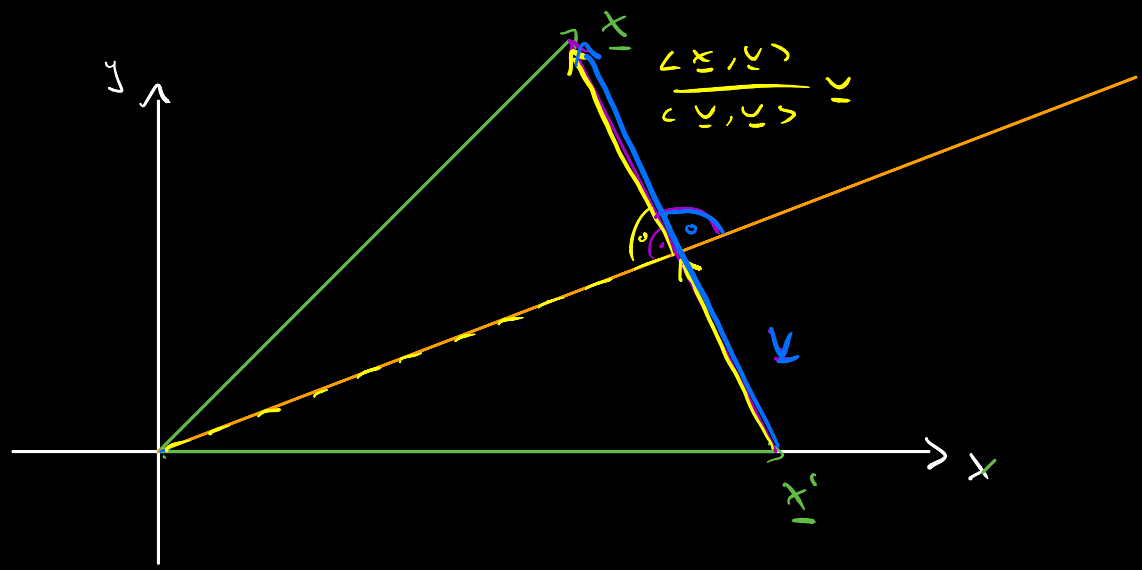
$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \|v\| \cdot \underline{e}_v \rangle$

$= \|v\| \langle \underline{u}, \underline{e}_v \rangle$

Revisit Householdermatrix:

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}} - 2 \frac{\underline{v}\underline{v}^T}{\underline{v}^T\underline{v}} = \underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\underline{u}^T \quad , \quad \underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$$

$$\underline{\underline{H}}\,\underline{x} = \underline{\underline{I}}\,\underline{x} - 2 \frac{\underline{v}\underline{v}^T\underline{x}}{\underline{v}^T\underline{v}} = \underline{\underline{I}}\,\underline{x} - 2 \underbrace{\frac{\langle \underline{x}, \underline{v} \rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} \underline{v}}_{\text{Orth. proj. von } \underline{x} \text{ auf } \underline{v}}$$

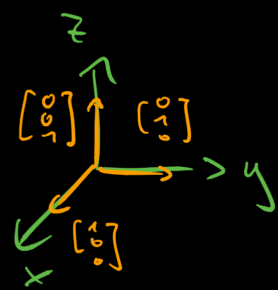


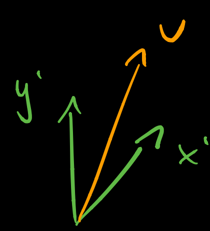
Spiegelebene: $v_1 x + v_2 y = 0$ $\qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

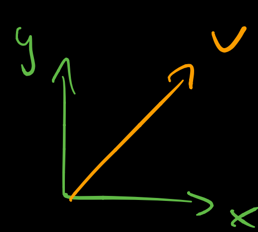
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix}$$

<u>Orthonormalbasis:</u> (ONB)

Bsp: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ im $\mathbb{R}^3$







Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren: $B = \{b^{(1)}, \dots, b^{(n)}\}$

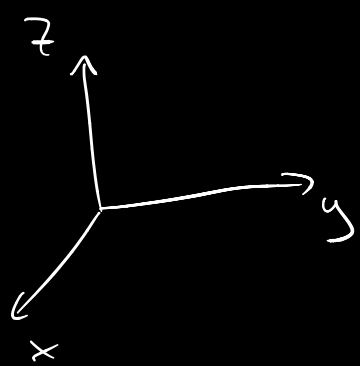
(i) $e^{(1)} = \dfrac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

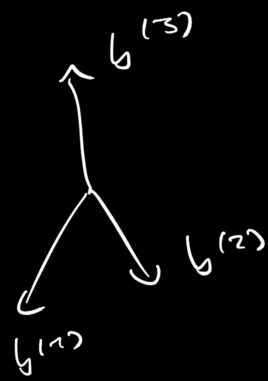
(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)}$ & $e^{(2)} = \dfrac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

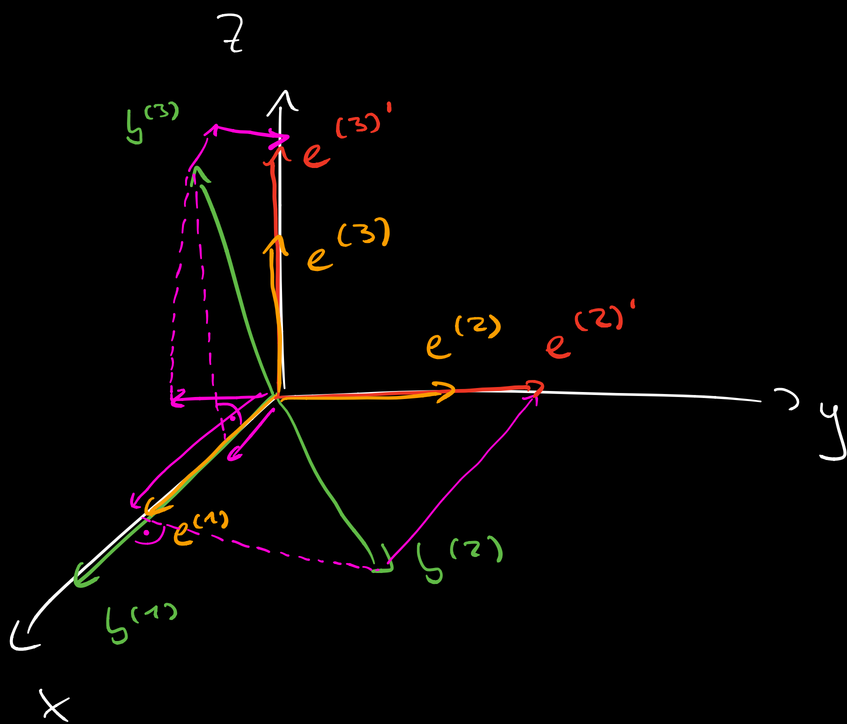
(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)}$ & $e^{(3)} = \dfrac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

$\vdots$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{ONB} = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}\}}}$







Bsp:

Euklidischer Raum: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\uparrow \qquad \uparrow$

(i) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Alle Skalarprodukte äquivalent?